ΟΡΙΣΜΟΣ 2

▸ Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $a \in A$ θα λέμε ότι είναι εσωτερικό σημείο του A εάν $\exists\, r>0$ τ.ω. $B(a,r) \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A το συμβολίζουμε με A°, λέγεται πυρήνας του A.

▸ Ένα σημείο $a \in X$ θα λέμε ότι είναι σημείο επαφής του συνόλου $A \subseteq X$ εάν για κάθε $r>0$ $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων επαφής θα το συμβολίζουμε με $\overline{A}$ και λέγεται θήκη του A.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο στον X που περιέχει το A.

(ουσιαστικά $\overline{A} = \bigcap \{ B \subseteq X : B \text{ κλειστό}, A \subseteq B \}$

▶ Ένα σημείο $a \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν ισχύει $B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $r > 0$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης θα το συμβολίζουμε με A' και ονομάζεται παράγωγο σύνολο.

ΠΡΟΣΟΧΗ!
Ένα σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A μπορεί να μην ανήκει στο σύνολο A.

▶ Γενικά, σε χώρους που δεν είναι μετρικοί χώροι, ένα σημείο a είναι ω-σημείο συσσώρευσης του συνόλου A σε έναν τοπολογικό χώρο X, αν κάθε περιοχή του σημείου a περιέχει άπειρα σημεία του συνόλου A.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
Για κάθε μετρικό χώρο (X, d) ισχύει ότι:
$\forall x, y \in X$ με $x \neq y$ $\exists$ περιοχές του x, y αντίστοιχα U_x και V_y τέτοιες ώστε $y \notin U_x$ και $x \in V_y$

Την παραπάνω ιδιότητα δεν την έχουν όλοι οι χώροι, αλλά την έχουν οι μετρικοί χώροι.

Συμπερασματικά οι έννοιες σημείο συσσώρευσης και ω-σημείο συσσώρευσης ταυτίζονται.

▶ Ένα σημείο $a \in A$ είναι μεμονωμένο στοιχείο του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης.
(Ισοδύναμα, αν $\exists r > 0$ τω. $B_0(a, r) \cap A = \emptyset$)

▶ Ένα σημείο a λέγεται συνοριακό σημείο ενός υποσυνόλου A του X, αν το σημείο αυτό δεν είναι σημείο στο εσωτερικό του A, ούτε σημείο στο εσωτερικό του A^c.
Το σύνολο των συνοριακών σημείων του A το συμβολίζουμε

Με 2Α.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σε ένα μετρικό χώρο (X,d) η θήκη μιας μπάλας $B(a,r)$ είναι η κλειστή μπάλα.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω (X,d) μ.χ. και $A \subseteq X$, τότε ισχύει $x \in \bar{A}$ αν-ν $\exists$ ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ με $x_n \to x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ
Ομάδα $(G,*)$ είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια διμελή σχέση $*$, η οποία πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
i) Η διμελής πράξη $*$ είναι προσεταιριστική

ii) $\exists$ ένα στοιχείο $e \in G$, τέτοιο ώστε $e*x = x = x*e \ \forall x \in G$
(το e λέγεται ταυτοτικό στοιχείο)

iii) $\forall a \in G$, $\exists a' \in G$ με την ιδιότητα: $a*a' = a'*a = e$
(το a' λέγεται αντίστροφο του a ως προς $*$)

ΟΡΙΣΜΟΣ
- Μια ομάδα λέγεται αβελιανή αν η $*$ είναι αντιμεταθετική

- Ένας δακτύλιος $(R,+,\cdot)$ είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με 2 πράξεις $+,\cdot$ τις οποίες αποκαλούμε πρόσθεση και πολ/σμό για τις οποίες ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
i) $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα

ii) Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.

iii) $\forall a, b, c \in R$ ισχύει ο επιμεριστικός νόμος
$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

- Ένας δακτύλιος στον οποίο ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός τότε ο δακτύλιος λέγεται αντιμεταθετικός δακτύλιος

- Ένας δακτύλιος R για τον οποίο $\exists$ πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο 1 για το οποίο ισχύει
$1\cdot x = x\cdot 1 = x, \forall x \in R$, τότε λέμε ότι R είναι δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο

- Πολλαπλασιαστικό αντίστροφο ενός στοιχείου a ενός σε έναν δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο 1, είναι ένα στοιχείο a^{-1} για το οποίο ισχύει $a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Σώμα είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο στον οποίο κάθε μη μηδενικό στοιχείο του έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με $+, \cdot$ είναι σώμα.

Επεκτείνουμε το $\mathbb{R}$ προσαρτώντας σε αυτό τα στοιχεία $+\infty, -\infty$ και παίρνουμε το σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, τα στοιχεία $+\infty, -\infty$ συνδέονται με τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ως εξής:

$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$ (επέκταση της διάταξης)

Επίσης θεωρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

- $x + (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$

- $x\cdot(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty, & x>0\\ \mp\infty, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (Προσοχη! Δεν μιλάμε για όρια, δηλαδή δεν τείνει στο $\pm\infty$ ή 0 αλλά κάνει καθαρά $\pm\infty$ ή 0)

- $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty$

- $(\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty$

- $x/(\pm\infty)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι οι εκφράσεις:

$(+\infty)+(-\infty)$ και $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ <u>δεν</u> ορίζονται,

ενώ επίσης <u>δεν</u> ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα με το άπειρο, δηλ.

$$(x+y)\cdot(\pm\infty)\neq x(\pm\infty)+y(\pm\infty)$$

Το $\mathbb{R}^*$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $+,\cdot$ <u>δεν</u> είναι σώμα, γιατί:

- δεν ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα ως προς του πολ/μο

- δεν αντιστοιχεί κάπου το ζεύγος $(+\infty)+(-\infty)$ όπως απαιτείται από την κλειστότητα της πράξης +.

(Αν προσπαθούσαμε κάπου να το αντιστοιχίσουμε θα καταλήγαμε σε αντινομία)

π.χ. αν θεωρήσουμε $(+\infty)+(+\infty)=a\in\mathbb{R}$ τότε

$[(+\infty)+(-\infty)]+(-\infty) \neq (+\infty)+[(-\infty)+(-\infty)]$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, με A'' θα συμβολίζουμε το γενικευμένο παράγωγο σύνολο του A δηλαδή είναι το σύνολο των στοιχείων του $\mathbb{R}^*$ που είναι όρια ακολουθιών στοιχείων του A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $A = \mathbb{N}$, τότε $A' = \emptyset$, ενώ $A'' = \{+\infty\}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ ▸ Εάν το A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $A'' = A$.

▸ Εάν το A δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}$ τότε το $+\infty \in A''$

▸ Εάν το A δεν είναι κάτω φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}$ τότε το $-\infty \in A''$

→ Άρα το γενικευμένο παράγωγο σύνολο του A, A'' ορίζει ως σημεία συσσώρευσης ακολουθιών το $+\infty$ ή το $-\infty$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Για το σύνολο $A = \{0\}$, τότε $A' = A'' = \emptyset$.

2) Εάν $A = (0,1)$ έχουμε $A' = [0,1] = A''$

3) $A = (0, +\infty)$, τότε $A' = [0, +\infty)$, ενώ $A'' = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\forall\, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ και $\delta > 0$, γράφουμε $B(y,\delta)$ για να παραστήσουμε κάποιο από τα ακόλουθα σύνολα:

i) Αν $y \in \mathbb{R}$, τότε $B(y,\delta) := \{x \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta\}$

ii) Αν $y = +\infty$, τότε $B(y,\delta) := \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\delta}\} = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$

iii) Αν $y=-\infty$, τότε $B(y,\delta):=\{x\in\mathbb{R}: x<-\frac{1}{\delta}\}=(-\infty,-\frac{1}{\delta})$.

iv) $B_0(y,\delta)=B(y,\delta)\setminus\{y\}$

ΑΝΩΤΑΤΟ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών το ανώτερο όριο (limit superior) ορίζεται να είναι:

$$\limsup a_n = \inf_k \sup\{a_n : n\geq k\}$$

και το κατώτερο όριο (limit inferior):

$$\liminf a_n = \sup_k \inf\{a_n : n\geq k\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ $\exists$ πάντα $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^*$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε ισχύουν τα εξής:

1) $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$
2) $\liminf(a_n)\leq\limsup(a_n)$
3) $\liminf(a_n)\geq b>-\infty$, $b\in\mathbb{R}$ αν-ν $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $a_n\geq b-\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$
4) $\limsup a_n\leq\gamma<+\infty$, $\gamma\in\mathbb{R}$, αν-ν $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $a_n\leq\gamma+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$
5) $\limsup a_n=\liminf a_n=\ell$ αν-ν $\exists \lim a_n$ και $\lim a_n=\ell\in\mathbb{R}^*$
6) $\exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τ.ω. $\lim a_{k_n}=\limsup a_n$
7) $\exists$ υπακολουθία (a_{λ_n}) της (a_n) τ.ω. $\lim a_{\lambda_n}=\liminf a_n$

8) $\liminf a_n$ είναι το μικρότερο από τα $\ell \in \mathbb{R}^*$ για τα οποία, $\exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim a_{k_n} = \ell$

9) Το $\limsup a_n$ είναι το μεγαλύτερο από τα $\ell \in \mathbb{R}^*$ για τα οποία, $\exists$ υπακολουθία (a_{λ_n}) της (a_n) με $\lim a_{\lambda_n} = \ell$

ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

- $\limsup a_n = \overline{\lim}\, a_n$
- $\liminf a_n = \underline{\lim}\, a_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω $a_n = (-1)^n$ τότε:

$\lim a_{2n} = \lim\limits_n (-1)^{2n} = 1$ και $\lim a_{2n+1} = -1$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$ και $\underline{\lim}\, a_n = -1$

2) Έστω $a_n = n$, τότε $\lim a_n = +\infty$

$\overline{\lim}\, a_n = +\infty = \underline{\lim}\, a_n$

3) Έστω $a_n = -n$, τότε $\lim a_n = -\infty$

$\overline{\lim}\, a_n = -\infty = \underline{\lim}\, a_n$

4) Έστω $a_n = \begin{cases} -n, & n = 1,3,5,\dots \\ \frac{1}{2^{n-1}}, & n = 2,4,6\dots \end{cases}$ $\quad \underline{\lim}\, a_n = -\infty$, $\quad \overline{\lim}\, a_n = 0$

5) Έστω

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 4k \\ 1 + e^{-n}, & n = 4k+1 \\ \frac{n+5}{2n+3}, & n = 4k+2 \\ \frac{n^2+2n}{3n+1}, & n = 4k+3 \end{cases}$$

$\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim(1+e^{-n}) = 1$, $\lim\left(\frac{n+5}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}$,

$\lim\left(\frac{n^2+2n}{3n+1}\right) = +\infty$.

Άρα $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $y \in A'$. Θα λέμε ότι ένα στοιχείο $l \in \mathbb{R}^*$ είναι το όριο της f στο y (συμβολισμός $\lim_{x \to y} f(x) = l$) αν ισχύει:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l, \varepsilon)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αν το όριο της f, $\exists$ στο $\mathbb{R}^*$, τότε αυτό ορίζεται μονοσήμαντα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

- Λόγω της μοναδικότητας του ορίου παριστάνουμε το όριο της f στο y με $\lim_{x \to y} f(x)$.

- Ισοδύναμα, ισχύει το εξής:

το $\lim_{x \to y} f(x)$ $\exists$ αν-ν $\forall (x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ με $\lim x_n = y$ να ισχύει $\lim_n f(x_n) = \lim_{x \to y} f(x)$.

Παρασκευή 2 Νοέμβρη 15:30 αναπλήρωση

Ασκηση Η.Ψ.

1) Εστω $X \neq \{0\}$. Θεωρούμε στον X την μετρική

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x=y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

ΝΔΟ $\nexists$ στάθμη επί του X της οποίας η αντίστοιχη τοπολογία στον X να ταυτίζεται με την τοπολογία που ορίζεται από την d.

2) Δείξτε ότι δεν μπορεί η f να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια:

i) $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

ii) $l_1 \in \mathbb{R}$, $l_2 = +\infty$ ή $l_2 = -\infty$

iii) $l_1 = -\infty$, $l_2 = +\infty$

(Με τον ορισμό)